Analiza Funkcjonalna + Topologia
WPPT IVr. semestr letni 2013
WYKŁAD 16: Ciągi dodatnio określone i Twierdzenie Herglotza

Współczynniki Fouriera–Stieltjesa

Na tym wykładzie poznamy tzw. współczynniki Fouriera–Stieltjesa miar nieujemnych skończonych na okręgu jednostkowym. Okaże się to niezwykle ważnym narzędziem przy analizie spektralnej operatorów unitarnych.

Definicja 1. Niech μ będzie miarą nieujemną skończoną określoną na zbiorach borelowskich okręgu jednostkowego $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Przez *ciąg współczynników Fouriera–Stieltjesa* tej miary rozumiemy ciąg dwustronny

$$\hat{\mu}(n) = \int z^{-n}\, d\mu \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

Istnieje bardzo ścisła analogia pomiędzy współczynnikami Fouriera–Stieltjesa miary, a współczynnikami Fouriera funkcji $f \in L^2(\lambda)$, gdzie λ oznacza unormowaną miarę Lebesgue'a na $\mathbb{T}$. Mianowicie, jeśli $f \in L^2(\lambda)$ jest funkcją nieujemną i określimy miarę λ_f jako miarę Lebesgue'a z gęstością f (czyli $d\lambda_f = f d\lambda$), to współczynniki Fouriera–Stieltjesa miary λ_f są tożsame ze współczynnikami Fouriera funkcji f. Na tym jednak analogia się kończy. Istnieją miary absolutnie ciągłe względem miary Lebesgue'a ale z gęstością należącą do $L^1(\lambda)\setminus L^2(\lambda)$ oraz miary singularne względem miary Lebesgue'a. Dla takich miar ciąg współczynników Fouriera–Stieltjesa nie jest sumowalny z kwadratem i nie reprezentuje ciągu współczynników Fouriera żadnego elementu przestrzeni Hilberta. Wspczynniki miar posiadających atomy nawet nie dążą do zera!

Co jest jednak najważniejsze, ciąg współczynników Fouriera–Stieltjesa pozwala jednoznacznie określić miarę:

Twierdzenie 1. Jeśli $\hat{\mu}(n) = \hat{\nu}(n)$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$, to $\mu = \nu$.

Dowód: To wynika natychmiast z dwóch faktów:

(1) Miary nieujemne skończone można utożsamiać z funkcjonałami nieujemnymi ograniczonymi na zespolonej przestrzeni funkcyjnej $C(\mathbb{T})$ (Twierdzenie Riesza).
(2) Zbiór funkcji $\{z^{-n} : n \in \mathbb{Z}\} = \{z^n : n \in \mathbb{Z}\}$ jest liniowo gęsty w $C(\mathbb{T})$ (Twierdzenie Stone'a–Weierstrassa).

Zatem miary, które dają te same całki na funkcjach z^{-n} zadają funkcjonały ciągłe równe sobie na zbiorze liniowo gęstym, a co za tym idzie równe sobie (jako funkcjonały na $C(\mathbb{T})$). To jednak oznacza, że wyjściowe miary są sobie równe. $\square$

Twierdzenie 2. Ciąg miar nieujemnych skończonych $(\mu_k)_{k\geq 1}$ na $\mathbb{T}$ traktowanych jako funkcjonały na $C(\mathbb{T})$ zbiega *słabo do miary (nieujemnej skończonej) μ wtedy i tylko wtedy, gdy ich ciągi współczynników Fouriera–Stieltjesa zbiegają po współrzędnych do ciągu współczynników Fouriera–Stieltjesa miary μ:

$$\mu_k \xrightarrow{\text{*słabo}} \mu \quad \iff \quad \forall_{n\in\mathbb{Z}}\ \ \hat{\mu}_k(n) \to \hat{\mu}(n).$$

Dowód: Implikacja w jedną stronę jest oczywista. Zbieżność *słaba miar oznacza zbieżność całek z dowolnej ustalonej funkcji ciągłej, w szczególności z z^{-n} (dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}$). A to jest właśnie zbieżność na n-tej (czyli każdej) współrzędnej ciągu współczynników Fouriera–Stieltjesa. W drugą stronę: Po pierwsze mamy $\|\mu_k\| = \mu_k(\mathbb{T}) = \int 1\, d\mu_k = \hat{\mu}_k(0) \to \hat{\mu}(0) = \|\mu\|$, co dowodzi, że wszystkie miary μ_k i μ mają wspólnie ograniczone normy. Niech M oznacza ograniczenie. Dowolną funkcję ciągłą f można jednostajnie (z dokładnością do $\frac{\epsilon}{M}$) przybliżyć wielomianem $\sum_{n=1}^{N} c_n z^n$. Zatem

$$\int f(z)\, d\mu_k \approx_\epsilon \int \sum_{n=1}^{N} c_n z^n \, d\mu_k = \sum_{n=1}^{N} c_n \int z^n \, d\mu_k = \sum_{n=1}^{N} c_n \hat{\mu}_k(-n) \xrightarrow[k\to\infty]{}$$

$$\xrightarrow[k\to\infty]{} \sum_{n=1}^{N} c_n \hat{\mu}(-n) = \int \sum_{n=1}^{N} c_n z^n \, d\mu \approx_\epsilon \int f(z)\, d\mu.$$

Ponieważ ϵ jest dowolnie mały, ciąg całek $\int f(z)\, d\mu_k$ zbiega do całki $\int f(z)\, d\mu$, a ponieważ tak jest dla każdej $f \in C(\mathbb{T})$, więc miary μ_k zbiegają *słabo do μ. □

Uwaga: Powyższy dowód jest szczególnym przypadkiem ogólniejszego faktu: jeśli ciąg funkcjonałów na przestrzeni Banacha X zbiega (do jakiegoś funkcjonału granicznego) po nałożeniu na każdy element pewnego zbioru liniowo gęstego w X, to ciąg ten zbiega *słabo. Dowód jest taki sam.

Ciągi dodatnio określone

Podamy teraz kluczową charakteryzację tych ciągów, które są ciągami współczynników Fouriera–Stieltjesa miar nieujemnych skończonych na $\mathbb{T}$. Nie jest to ani należenie do ℓ^2 ani do ℓ^1, ani do żadnej innej znanej nam przestrzeni ciąowej. Jest to raczej warunek natury algebraicznej.

Definicja 2. Ciąg liczb zespolonych $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ nazywa się *dodatnio określony*, jeśli dla dowolnego ciągu liczb zespolonych $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ i dla każdego $N \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$\sum_{n,m\in[-N,N]} c_n \bar{c}_m \cdot a_{n-m} \geq 0.$$

Powyższy warunek wydaje się trudny do sprawdzenia, gdyż uwzględnia on *wszystkie* ciągi liczb zespolonych (c_n). Ponadto w żaden sposób nie kojarzy się on z sumowalnością, czy nawet ograniczonością ciągu (a_n). Pomocne w zrozumieniu struktury ciągu dodatnio określonego są dwa poniższe i kluczowe dla nas przykłady.

Przykład 1. Ciąg współczynników Fouriera–Stieltjesa $(\hat{\mu}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ dowolnej miary nieujemnej skończonej μ na okręgu jednostkowym $\mathbb{T}$ jest dodatnio określony.

Sprawdzenie: Ustalmy dowolny dwustronny ciąg liczb zespolonych $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ i liczbę naturalną N. Niech $f(z) = \sum_{n=-N}^{N} c_n z^{-n}$. Jest to wielomian, a więc funkcja ciągła na $\mathbb{T}$ (zatem ograniczona). Funkcja $|f|^2$ jest nieujemna i ciągła (zatem ograniczona, stąd całkowalna). Mamy więc $\int |f|^2\, d\mu \geq 0$. Z drugiej strony

$$|f|^2 = f \cdot \bar{f} = \sum_{n=-N}^{N} c_n z^{-n} \cdot \sum_{m=-N}^{N} \bar{c}_m z^m = \sum_{n,m\in[-N,N]} c_n \bar{c}_m \cdot z^{-(n-m)}.$$

Całkując miarą μ otrzymujemy

$$0 \leq \int |f|^2\, d\mu = \sum_{n,m\in[-N,N]} c_n \bar{c}_m \int z^{-(n-m)}\, d\mu = \sum_{n,m\in[-N,N]} c_n \bar{c}_m \cdot \hat{\mu}(n-m).$$

Przykład 2. Niech T oznacza dowolny operator unitarny na ośrodkowej przestrzeni Hilberta H i niech $x \in H$. Wtedy ciąg $a_n = \langle T^n x, x\rangle$ jest dodatnio określony.

Sprawdzenie: Jak poprzednio, ustalmy ciąg $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ i liczbę N. Niech

$$y = \sum_{n=-N}^{N} c_n T^n x \in H.$$

Oczywiście kwadrat normy y jest nieujemny. Czyli

$$0 \le \|y\|^2 = \Big\langle \sum_{n=-N}^{N} c_n T^n x, \sum_{m=-N}^{N} c_m T^m x\Big\rangle = \sum_{m,n\in[-N,N]} c_n \bar{c}_m \langle T^n x, T^m x\rangle.$$

Z unitarności T (a tym samym unitarności T^m) mamy

$$\langle T^n x, T^m x\rangle = \langle (T^m)^* T^n x, x\rangle = \langle T^{-m} T^n x, x\rangle = \langle T^{n-m} x, x\rangle = a_{n-m},$$

co wstawione do poprzedniego wzoru daje żądaną nierówność dowodzącą dodatniej określoności ciągu (a_n).

Udowodnimy teraz twierdzenie w pewnym sensie przeciwne do Przykładu 1. Jest to główne twierdzenie dzisiejszego wykładu.

Twierdzenie 2 (Herglotz). Każdy ciąg dodatnio określony $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ jest ciągiem współczynników Fouriera–Stieltjesa pewnej miary nieujemnej skończonej μ na $\mathbb{T}$.

Dowód: Przy ustalonym $z \in \mathbb{T}$ utwórzmy ciąg $c_n = z^n$ ($n \in \mathbb{Z}$). Wtedy, z dodatniej określoności ciągu (a_n) mamy, dla każdego $N \in \mathbb{N}$,

$$(*) \quad 0 \le \sum_{n,m\in[-N,N]} c_n \bar{c}_m \cdot a_{n-m} =$$

$$\sum_{n,m\in[-N,N]} z^{n-m} \cdot a_{n-m} = \sum_{k=-2N}^{2N} (2N+1-|k|)\, a_k z^k =$$

$$(2N+1) \sum_{k=-2N}^{2N} \big(1 - \tfrac{|k|}{2N+1}\big)\, a_k z^k = (2N+1)\cdot \mathbf{P}_N(z).$$

(powyżej policzyliśmy ile par (n,m) z przedziału $[-N,N]$ daje tą samą różnicę k). $\mathbf{P}_N(z)$ jest wielomianem zmiennej z. Ponieważ nieujemność zachodzi niezależnie od wartości z, nasz wielomian musi być rzeczywisty i nieujemny na $\mathbb{T}$. Wyrazem wolnym tego wielomianu jest a_0, a poza nim mamy sumę funkcji nieparzystych (wartość w $-z$ jest przeciwna do wartości w z). Ponieważ całka z funkcji nieparzystej (miarą Lebesgue'a) jest zero, to całka z $\mathbf{P}_N$ wynosi a_0, a ponieważ $\mathbf{P}_N$ jest nieujemny, to jest to zarazem jego norma w $L^1(\lambda)$. W ten sposób wykazaliśmy wspólną ograniczoność w normie $L^1(\lambda)$ wielomianów $\mathbf{P}_N$ przy zmieniającym się N. To oznacza, że miary (nieujemne) $d\mu_N = \mathbf{P}_n\, d\lambda$ traktowane jako funkcjonały na $C(\mathbb{T})$ są wspólnie ograniczone w normie (wiemy, że norma funkcjonału na $C(X)$ zadanego przez miarę probabilistyczną ν na X z gęstością h jest równa normie w $L^1(\nu)$ tej gęstości). Z twierdzenia Banacha–Alaoglu istnieje podciąg miar μ_{N_j} zbieżny *słabo do pewnej miary (nieujemnej) μ o normie nie przekraczającej a_0.

Zatem na mocy Twierdzenia 2, współczynniki Fouriera–Stieltjesa miar μ_{N_j} zbiegają do współczynników Fouriera–Stieltjesa miary μ. Mamy, dla każdego ustalonego n i $N \geq |n|$,

$$\hat{\mu}_N(n) = \int z^{-n}\,\mathbf{P}_N\,d\lambda = \sum_{k=-2N}^{2N} \left(1 - \tfrac{|k|}{2N+1}\right) a_k \int z^{k-n}\,d\lambda.$$

Nie zeruje się tylko składnik przy $k = n$ dla którego całka po prawej wynosi 1. Mamy więc

$$\hat{\mu}_N(n) = \left(1 - \tfrac{|n|}{2N+1}\right) a_n.$$

Biorąc granicę po podciągu N_j otrzymujemy po prawej stronie $\hat{\mu}(n)$ a po lewej a_n. W ten sposób wykazaliśmy, że ciąg (a_n) pokrywa się z ciągiem współczynników Fouriera–Stieltjesa miary nieujemnej skończonej μ. $\square$

Uwaga: Przy okazji pokazaliśmy, że cały ciąg μ_N zbiega *słabo do μ.

Niektóre własności ciągów dodatnio określonych.

Ciąg dodatnio określony bynajmniej nie musi składać się z wyrazów nieujemnych. Tylko a_0 jest nieujemny. Musi on jednak być ograniczony i antysymetryczny, jak to zebrano w poniższym fakcie:

Fakt 1. Każdy ciąg dodatnio określony $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ spełnia $a_0 \geq 0$. Miara związana z ciągiem dodatnio określonym (a_n) ma normę a_0. Ponadto dla każdego $n \in \mathbb{Z}$,

(1) $a_{-n} = \bar{a}_n$,
(2) $|a_n| \leq a_0$.

Dowód: Wobec Twierdzenia Herglotza fakty te są oczywiste. Wystarczy napisać, że $a_n = \int z^{-n}\,d\mu$ dla pewnej miary nieujemnej skończonej μ na $\mathbb{T}$ (i zauważyć, że $z^0 = 1$, $\overline{z^n} = z^{-n}$ oraz $|z^n| = 1$). $\square$

Jak już powiedzieliśmy, miara μ jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a z gęstością należącą do $L^2(\lambda)$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(\hat{\mu}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ należy do ℓ^2. Rozpoznanie miary absolutnie ciągłej z gęstością w $L^1(\lambda)$ na podstawie ciągu współczynników Fouriera–Stieltjesa jest zadaniem bardzo trudnym (nie jest znane sprawdzalne kryterium). W każdym razie ma to niewiele wspólnego z należeniem tego ciągu do ℓ^1. Jedno, co można łatwo rozpoznać to część atomowa miary. Mówi o tym twierdzenie Wienera, które przytoczymy bez dowodu:

Twierdzenie 3 (Wiener). Suma kwadratów mas atomów miary nieujemnej skończonej μ na $\mathbb{T}$ wynosi

$$\sum_{z\in\mathbb{T}} \mu(\{z\})^2 = \lim_N \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |\hat{\mu}(n)|^2 = \lim_N \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} |\hat{\mu}(n)|^2.$$

W szczególności miara μ jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy granica po prawej wynosi zero (tzn. ciąg kwadratów modułów współczynników Fouriera–Stieltjesa miary μ ma średnią zero). $\square$

Tomasz Downarowicz